Γραμμική Άλγεβρα 1 8/10/15

Γενικές ή αφηρημένες έννοιες

πχ. Η έννοια του σώματος $(F, +, \cdot)$ ή απλώς F

Υπάρχουν προτάσεις που ισχύουν σε κάθε σώμα F

π.χ. μοναδικότητα αντιθέτου, $1_F \neq 0_F$

Υπάρχουν ιδιότητες που για κάποια σώματα F ισχύουν αλλά για κάποια άλλα δεν ισχύουν

π.χ. στο $\mathbb{R}$ $1+1 \neq 0$.

Αντίθετα αν F το σώμα με δύο στοιχεία $1_F + 1_F = 0_F$

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$ με $A = (a_{ij})$. Ο A λέγεται διαγώνιος αν $a_{ij} = 0_F$ όταν $i \neq j$.

π.χ. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος αν και μόνο αν $a_{12} = a_{21} = 0_F$

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ δεν είναι διαγώνιος γιατί $a_{32} = 1 \neq 0$

Ορισμός (Ανάστροφος πίνακας)

Έστω $A \in F^{\nu \times \mu}$ με $A = (a_{ij})$. Ο ανάστροφος πίνακας $A^t \in F^{\mu \times \nu}$ είναι ο πίνακας που έχει (i,j)-στοιχείο το (j,i) στοιχείο του A

Παράδειγμα: Αν $\underset{\in F^{2\times 2}}{A} = \begin{bmatrix} 2, & 3 \\ 4, & 5 \end{bmatrix}$ τότε ο $\underset{\in F^{2\times 2}}{A^t} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

π.χ. Έστω $A = [3, 5, 7] \in F^{1\times 3}$ τότε $A^t = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \in F^{3\times 1}$. Με άλλα λόγια

ο αριθμός στηλών του A^t = αριθμός γραμμών του A

ο αριθμός γραμμών του A^t = αριθμό στηλών του A

και ο A^t προκύπτει από τον A "κάνοντας" τις στήλες του A γραμμές του A^t

Έστω $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{bmatrix}$ τότε $A^t=\begin{bmatrix}1&5&9\\2&6&10\\3&7&11\\4&8&12\end{bmatrix}$

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας $A\in F^{v\cdot v}$ λέγεται συμμετρικός αν $A=A^t$

π.χ ο πίνακας $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ είναι συμμετρικός, ενώ ο πίνακας

$\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}\in R^{2\times 2}$ δεν είναι συμμετρικός.

3) Πολλαπλασιασμός Πινάκων
2) Βαθμωτό πολλαπλασιασμό πινάκων
1) Άθροισμα πινάκων

Σημαντικό: Η πρόσθεση δύο πινάκων A,B ορίζεται μόνο αν έχουν το ίδιο διαστάσεις*, δηλ. ο αριθμός γραμμών του A = αριθμός γραμμών του B και αριθμός στηλών του A = αριθμός στηλών του B

Ορισμός: Έστω $A=(a_{ij})\in F^{v\cdot\mu}$, $B=(b_{ij})\in F^{v\cdot\mu}$
Ο πίνακας $A+B\in F^{v\cdot\mu}$ είναι ο πίνακας με (i,j)-στοιχείο το $a_{ij}+b_{ij}$

1. π.χ. 1) Αν $A=[3,5]$, $B=[-2,8]$, τότε $A+B=[1,13]$
2) Αν $A=\begin{bmatrix}3&5\\2&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ τότε $A+B=A$
3) Ο πίνακας $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ και $[2,5]$ δεν προστίθενται

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός στοιχείου του σώματος σε πίνακα

Ορισμός: Έστω $A=(a_{ij}) \in F^{\nu \cdot \mu}$ και $\kappa \in F$. Ορίζουμε πίνακα $\kappa A \in F^{\nu \cdot \mu}$ να είναι ο πίνακας με (ij)-στοιχείο ίσο με $\kappa \cdot a_{ij}$.

π.χ. Έστω $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\kappa=2$ τότε $\kappa A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Αν $\kappa=0$ τότε $\kappa \cdot A=\begin{bmatrix} 0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Αν $\kappa=\sqrt{2}$ και $A=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$ τότε $\kappa \cdot A=\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Ορισμός: Ο μηδενικός πίνακας $\Phi \in F^{\nu \cdot \mu}$ είναι ο $\nu \cdot \mu$ πίνακας με όλα τα στοιχεία ίσα με 0_F.

π.χ. Ο μηδενικός πίνακας 1×3 πίνακας είναι ο πίνακας $[0_F \; 0_F \; 0_F]$

Ορισμός: Αν $A=(a_{ij}) \in F^{\nu \cdot \mu}$ ορίζουμε $-A \in F^{\nu \cdot \mu}$ με την ιδιότητα ότι έχει ως (i,j) στοιχείο το $-a_{ij}$ (όπου $-a_{ij}$ είναι το αντίθετο προς την πρόσθεση του a_{ij} στο σώμα F)

π.χ. Έστω $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ τότε $-A=\begin{bmatrix} -3 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

Πρόταση: Για κάθε $A,B,C \in F^{\nu \cdot \mu}$ και $\kappa,\lambda \in F$ ισχύουν

i) $A+B=B+A$
ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$
iii) $A+\Phi_{\nu\mu}=\Phi+A=A$
iv) $A+(-A)=(-A)+A=\Phi$ (ύπαρξη αντιθέτου)
v) $1_F \cdot A=A$
vi) $(\kappa\cdot\lambda)\cdot A=\kappa(\lambda\cdot A)$
$(\kappa+\lambda)\cdot A=\kappa A+\lambda A$ $\quad \kappa(A+B)=\kappa A+\kappa B$

Απόδειξη του $A+(B+C)=(A+B)+C$

Έστω $A=(\alpha_{ij})$ $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$. Τότε το (i,j) στοιχείο του $A+(B+C)$ είναι ίσο με $\alpha_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ ενώ το (ij) στοιχείο του $(A+B)+C$ είναι ίσο με $(\alpha_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$. Επειδή η πρόσθεση σε ένα σώμα είναι προσεταιριστική, το αποτέλεσμα έπεται.

Έστω $A=\begin{bmatrix}2&5&7\\2&4&6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$B+C=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$, $A+(B+C)=\begin{bmatrix}3&6&8\\3&4&7\end{bmatrix}$.

$A+B=\begin{bmatrix}3&5&8\\3&4&6\end{bmatrix}$ $(A+B)+C=\begin{bmatrix}3&6&8\\3&4&7\end{bmatrix}$

$\kappa=3$, $\lambda=-2$ $(\kappa+\lambda)A=1\cdot A=A$

$\kappa A=[\ldots]$

$\lambda\cdot A=[\ldots]$

Πρόταση: Έστω $A,B\in F^{\nu\cdot\mu}$ και $\kappa\in F$. Τότε

i) Ο πίνακας $-A$ είναι ο μοναδικός αντίθετος του A ως προς την $+$

ii) $-(-A)=A$

iii) $-(A+B)=(-A)+(-B)$

iv) $0_F\cdot A=0_{\nu\cdot\mu}$

v) $\kappa\cdot 0_{\nu\cdot\mu}=0_{\nu\cdot\mu}$

vi) $(-\kappa)\cdot A=\kappa\cdot(-A)=-(\kappa\cdot A)$

Απόδειξη: Αφού η πρόσθεση πινάκων και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός γίνεται κατά συντεταγμένες η απόδειξη ανάγεται στις αντίστοιχες ιδιότητες στο σώμα F, (που ξέρουμε ότι ισχύει γιατί F σώμα)